# Mathématiques : analyse et approches
# Niveau moyen
# Épreuve 2

9 mai 2023

**Zone A** après-midi | **Zone B** matin | **Zone C** après-midi

Numéro de session du candidat

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |

1 heure 30 minutes

## Instructions destinées aux candidats

- Écrivez votre numéro de session dans les cases ci-dessus.
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Section A : répondez à toutes les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet.
- Section B : répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet. Écrivez votre numéro de session sur la première page du livret de réponses, et attachez ce livret à cette épreuve d'examen et à votre page de couverture en utilisant l'attache fournie.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques : analyse et approches** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[80 points]**.



2223 – 7120

Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

## Section A

Répondez à **toutes** les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet. Si cela est nécessaire, vous pouvez poursuivre votre raisonnement en dessous des lignes.

**1.** [Note maximale : 5]

Un botaniste mène une expérience qui étudie la croissance des plantes.

Les hauteurs des plantes sont mesurées lors de sept jours différents.

Le tableau suivant indique le nombre de jours, $d$, écoulés depuis le début de l'expérience et la hauteur moyenne, $h\,\text{cm}$, des plantes à chacun de ces jours.

| Nombre de jours ($d$) | 2 | 5 | 13 | 24 | 33 | 37 | 42 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Hauteur moyenne ($h$) | 10 | 16 | 30 | 59 | 76 | 79 | 82 |

(a) La droite de régression de $h$ en fonction de $d$ pour ces données peut être écrite sous la forme $h = ad + b$.

Trouvez la valeur de $a$ et la valeur de $b$. [2]

(b) Écrivez la valeur du coefficient de corrélation de Pearson, $r$. [1]

(c) Utilisez votre droite de régression pour estimer la hauteur moyenne des plantes lorsque $20$ jours se sont écoulés depuis le début de l'expérience. [2]

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

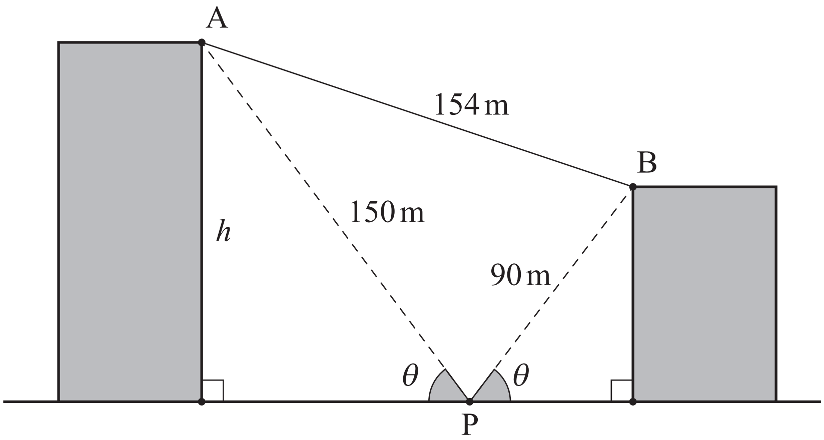
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**2.** [Note maximale : 6]

Le diagramme suivant montre deux bâtiments situés sur un terrain plat.

À partir du point $\mathrm{P}$ situé au niveau du sol entre les deux bâtiments, l'angle d'élévation au sommet de chaque bâtiment est $\theta$.

**la figure n'est pas à l'échelle**




La distance du point $\mathrm{P}$ au point $\mathrm{A}$ situé au sommet du plus grand bâtiment, est de $150$ mètres.

La distance du point $\mathrm{P}$ au point $\mathrm{B}$ situé au sommet du plus petit bâtiment, est de $90$ mètres.

La distance entre $\mathrm{A}$ et $\mathrm{B}$ est $154$ mètres.

(a) Trouvez la mesure de $\mathrm{A\hat{P}B}$. [3]

(b) Trouvez la hauteur, $h$, du plus grand bâtiment. [3]

**3.** [Note maximale : 5]

La quantité d'un certain médicament, en milligrammes $(\mathrm{mg})$, dans le corps d'un patient peut être modélisée par la fonction $A(t) = 500\mathrm{e}^{-kt}$, où $k$ est une constante positive et $t$ est le temps, en heures, après que la dose initiale ait été administrée.

(a) Écrivez la quantité du médicament dans le corps du patient lorsque $t = 0$. [1]

Après trois heures, la quantité du médicament dans le corps du patient a diminué à $280\,\mathrm{mg}$.

(b) Trouvez la valeur de $k$. [2]

La deuxième dose est administrée $T$ heures après la dose initiale, lorsque la quantité du médicament dans le corps du patient est de $140\,\mathrm{mg}$.

(c) Trouvez la valeur de $T$. [2]

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**4.** [Note maximale : 8]

Les poids, $W$ grammes, de sacs de riz emballés dans une usine peuvent être modélisés par une distribution normale dont la moyenne est de $204$ grammes et l'écart type est de $5$ grammes.

(a) Un sac de riz est choisi au hasard.

Trouvez la probabilité qu'il pèse plus de $210$ grammes. [2]

Selon ce modèle, $80\%$ des sacs de riz pèsent entre $w$ grammes et $210$ grammes.

(b) Trouvez la probabilité qu'un sac de riz choisi au hasard pèse moins de $w$ grammes. [2]

(c) Trouvez la valeur de $w$. [2]

(d) Dix sacs de riz sont choisis au hasard.

Trouvez la probabilité qu'exactement un de ces sacs pèse moins de $w$ grammes. [2]

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**5.** [Note maximale : 7]

Le développement de $(x+h)^8$, où $h>0$, peut s'écrire comme $x^8+ax^7+bx^6+cx^5+dx^4+...+h^8$, où $a$, $b$, $c$, $d$, ... $\in \mathbb{R}$.

(a) Trouvez une expression, en fonction de $h$, pour

(i) $a$ ;

(ii) $b$ ;

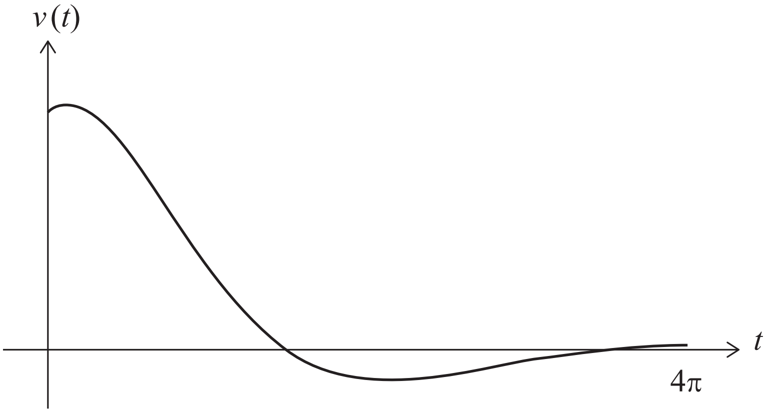
(iii) $d$. [4]

(b) Sachant que $a$, $b$, et $d$ sont les trois premiers termes d'une suite géométrique, trouvez la valeur de $h$. [3]

**6.** [Note maximale : 6]

Une particule se déplace en ligne droite de sorte que sa vitesse, $v\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, au temps $t$ secondes est donnée par $v(t) = 4\mathrm{e}^{-\frac{t}{3}}\cos\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$, pour $0 \le t \le 4\pi$.

La représentation graphique de $v$ est illustrée dans le diagramme suivant.




Soit $t_1$ le premier instant où l'**accélération** de la particule est nulle.

(a) Trouvez la valeur de $t_1$. [2]

Soit $t_2$ le **deuxième** instant où la particule est au repos.

(b) Trouvez la valeur de $t_2$. [2]

(c) Trouvez la distance parcourue par la particule entre $t = t_1$ et $t = t_2$. [2]

Veuillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page ne seront pas corrigées.

N'écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

## Section B

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page.

**7.** [Note maximale : 15]

Considérez la fonction $h(x) = \sqrt{4x-2}$, pour $x \geq \frac{1}{2}$.

(a) (i) Trouvez $h^{-1}(x)$, la fonction réciproque de $h(x)$, et indiquez son domaine.

(ii) Écrivez l'image de $h^{-1}(x)$. [5]

(b) La représentation graphique de $h$ croise la représentation graphique de $h^{-1}$ en deux points.

Trouvez les abscisses de ces deux points. [3]

(c) Trouvez l'aire délimitée par la représentation graphique de $h$ et la représentation graphique de $h^{-1}$. [2]

(d) Trouvez $h'(x)$. [2]

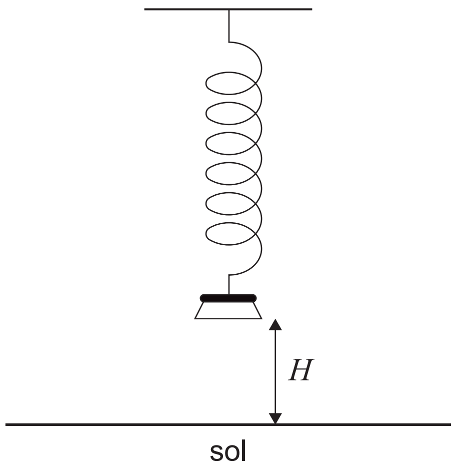
(e) Trouvez la valeur de $x$ pour laquelle la représentation graphique de $h$ et la représentation graphique de $h^{-1}$ ont la même pente. [3]

N’écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

**8.** [Note maximale : 13]

Un poids suspendu à un ressort est tiré vers le bas et relâché, de sorte qu’il monte et descende verticalement.

La hauteur, $H$ mètres, de la base du poids au-dessus du sol peut être modélisée par la fonction $H(t) = a\cos(7{,}8t) + b$, pour $a$, $b \in \mathbb{R}$ et $0 \le t \le 10$, où $t$ est le temps en secondes après que le poids a été relâché.



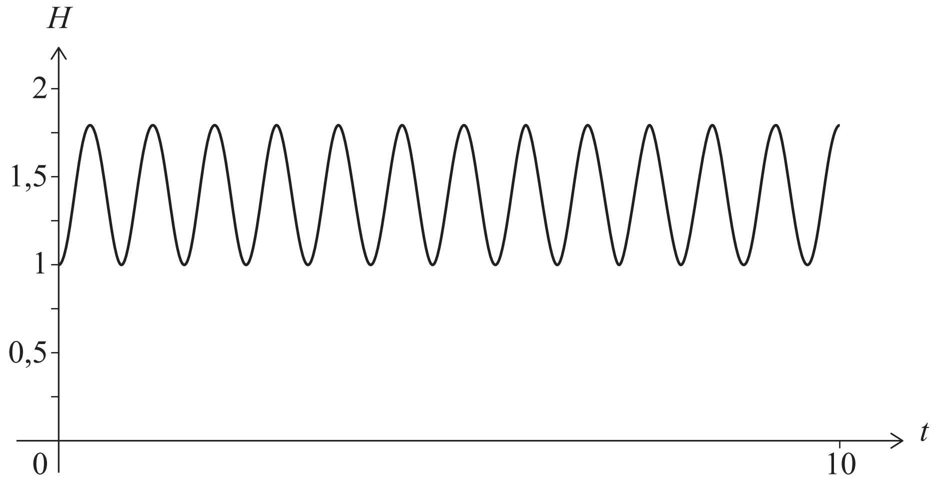

(a) Trouvez la période de la fonction. [2]

**(Suite de la question à la page suivante)**

N'écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

**(Suite de la question 8)**

Le poids est relâché lorsque sa base est à une hauteur minimale de $1$ mètre au-dessus du sol, et il atteint une hauteur maximale de $1{,}8$ mètres au-dessus du sol. La représentation graphique de $H$ est montrée dans le diagramme suivant.




(b) Trouvez la valeur de

(i) $a$ ;

(ii) $b$. [3]

(c) Trouvez le nombre de fois que le poids atteint sa hauteur maximale au cours des cinq premières secondes de son mouvement. [2]

(d) Trouvez la première fois que la base du poids atteint une hauteur de $1{,}5$ mètres. [2]

Une caméra est réglée pour prendre une photo du poids à un instant aléatoire au cours des cinq premières secondes de son mouvement.

(e) Trouvez la probabilité que la hauteur de la base du poids soit supérieure à $1{,}5$ mètres à l'instant où la photo est prise. [4]

N’écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

**9.** [Note maximale : 15]

Un sac contient $n$ boules. On sait que dix des boules sont vertes et que le reste des boules sont rouges. Des boules sont tirées du sac, l’une après l’autre, sans remise.

(a) Trouvez, en fonction de $n$, la probabilité que

(i) la première boule tirée soit verte ;

(ii) les deux premières boules tirées soient vertes. [3]

Pour les parties suivantes de cette question, soit $n = 25$.

(b) Montrez que la probabilité que les deux premières boules tirées soient rouges est de $0{,}35$. [2]

(c) Trouvez la probabilité que les trois premières boules tirées soient toutes rouges. [2]

(d) Trouvez la probabilité qu’au moins une des trois premières boules tirées soit verte. [2]

Un jeu consiste à tirer **quatre** boules, l’une après l’autre et sans remise, du sac contenant $25$ boules. Un joueur obtient des points en fonction du tirage auquel la première boule verte est tirée. À la fin de chaque partie, les quatre boules sont remises dans le sac.

Un joueur obtient zéro point si aucune boule verte n’est tirée ou si la première boule verte est tirée au premier ou au deuxième tirage.

Un joueur obtient $10$ points si la première boule verte est tirée au troisième tirage et obtient $50$ points si la première boule verte est tirée au quatrième tirage.

Millie joue à ce jeu $k$ fois. Elle trouve son score en additionnant ses points obtenus à chaque partie.

(e) Trouvez la plus petite valeur de $k$ telle que le score espéré de Millie soit supérieur à $100$. [6]

Références :